

Egy újabb szögfelezős feladat

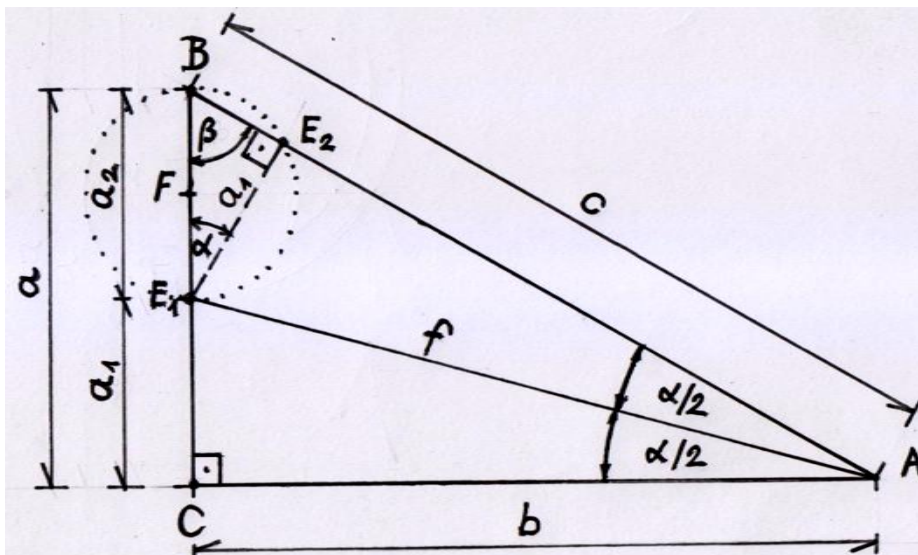
Az [1] műben találtuk az alábbi feladatot, melyet itt feldolgozunk.

Feladat

Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az a két szakasz, amelyre az egyik szög felezője a szemben fekvő befogót osztja!

Megoldás szerkesztéssel – [1]

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Képzeljük úgy, hogy már megoldottuk a feladatot, vagyis ismert a végeredmény: az ABC derékszögű háromszög. Az A csúsból induló f szögfelező egyenes kimetszi az a oldalból az E_1 pontot, mely a_1 és a_2 szakaszokra osztja a -t. Most tükrözzük az ACE_1 derékszögű háromszöget az f egyenesre! Ekkor kapjuk az AE_2E_1 derékszögű háromszöget, melynek $E_1E_2 = a_1$ oldala merőleges a keresett ABC háromszög $AB = c$ oldalára. Ekkor azonban az E_2 pont rajta van az $E_1B = a_2$ átmérőjű Thalész - körön. Ezek miatt a szerkesztés menete az alábbi, adott a_1 és a_2 , valamint derékszögű háromszög esetén.

- 1.) Felhordjuk az $CB = a = a_1 + a_2$ hosszúságú szakaszt, majd C végpontjában merőleges félegyenest húzunk.
- 2.) Az a_2 szakasz fölé Thalész - kört szerkesztünk.
- 3.) Utóbbit elmetsszük egy kis körívvel, melynek középpontja E_1 , sugara pedig a_1 ; így megkapjuk az E_2 metszéspontot.

4.) Meghúzzuk a BE_2 egyenest, mely a C -ből húzott, a -ra merőleges félegyenest az A pontban metszi.

Ezzel előállt a keresett ABC derékszögű háromszög, vagyis a szerkesztést elvégeztük.

Megoldás számítással

Itt a *szögfelezőtétel*ből indulunk ki, mely szerint – ld. pl.: [2]! – :

A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

Ezt alkalmazva az 1. ábra ABC derékszögű háromszögére, kapjuk, hogy:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c} = \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{a_1}{a_2}\right). \quad (1)$$

Most (1) - gyel is, az a -ra merőleges b oldal hossza, felhasználva, hogy

$$\underline{\underline{a(a_1, a_2) = a_1 + a_2}}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} b &= a \cdot \operatorname{tg} \beta = a \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha = a \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = a \cdot \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \\ &= (a_1 + a_2) \cdot \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}} = (a_1 + a_2) \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}} = (a_1 + a_2) \cdot \frac{a_1}{\sqrt{(a_2 + a_1) \cdot (a_2 - a_1)}} = \\ &= a_1 \cdot \sqrt{\frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1}}, \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{b(a_1, a_2) = a_1 \cdot \sqrt{\frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1}}}}, \quad a_2 > a_1. \quad (3)$$

A c oldal hossza *Pitagorász tételével*, valamint az előzőkkel is:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 = (a_1 + a_2)^2 + \left[(a_1 + a_2) \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}} \right]^2 = (a_1 + a_2)^2 \cdot \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \right) = \\ &= (a_1 + a_2)^2 \cdot \frac{a_2^2 - a_1^2 + a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} = (a_1 + a_2)^2 \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} = (a_1 + a_2)^2 \cdot \frac{a_2^2}{(a_2 + a_1) \cdot (a_2 - a_1)} = \\ &= a_2^2 \cdot \frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1}, \text{ innen pozitív gyökvonással:} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{c(a_1, a_2) = a_2 \cdot \sqrt{\frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1}}}}, \quad a_2 > a_1. \quad (4)$$

Ezzel a számításos megoldással is végeztünk.

Megjegyzések:

M1. Volt már korábban szögfelezős dolgozatunk, melynek címe: *Egy szögfelezős feladat.*

M2. Minthogy α hegyesszög, ezért (1) szerint is: $0 < \cos \alpha = \frac{a_1}{a_2} < 1 \rightarrow \underline{a_1 < a_2}$.

Emiatt (3) és (4) szerint is: $c > b$, egyezésben a szemlélettel.

M3. Egyszerű „rajzos megoldás” az alábbi.

1.) Az (1) képlettel kiszámítjuk α -t, majd ezzel a $\beta = 90^\circ - \alpha$ szöget is.

2.) Az 1. ábra szerinti $a = a_1 + a_2$ szakasz C végpontjában felhordjuk a derékszöget, a B végpontjában a β szöget; ezek szárai kimetszik az A pontot. Ezzel előállt az ABC derékszögű háromszög: megvan a „rajzos megoldás”.

M4. A szerkesztéses megoldás erősebben érzékeny lehet a szerkesztési pontatlanságokra, a viszonylag rövid BE_2 szakasz miatt. Ezért is javasolható a számítással történő ellenőrzés.

M5. Az ilyen – főleg tankönyvből vett – feladatok szövegezése sokszor tömör, száraz; akár túlzottan is. Emiatt ajánlatos a feladat szövegét többször is gondosan, nagy odafigyeléssel elolvasni, hogy ne értsük félre, ne hagyjunk ki valami fontosat.

Források:

[1] – *Pelle Béla*: Geometria

Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[2] –

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f5/Szogfelezotetel.svg/800px-Szogfelezotetel.svg.png>

Összeállította: *Galgóczi Gyula*
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2019. 11. 03.